Physique pour Geosciences (1) : ONDES

ExPG1On1

Exercice du cours CoPG1On1

kaminski@ipgp.jussieu.fr

Modes propres d'une chaîne d'oscillateurs

On reprend l'exemple d'une chaîne finie de N oscillateurs vu en cours. Les extrémités de la chaîne sont fixées à deux parois d'abscisses $x = 0$ et $x = (N+1)a$ avec a la distance au repos entre deux oscillateurs.

1 Rappeler l'équation du mouvement pour le mobile numéro n. La réécrire en faisant intervenir ω_0 la pulsation propre des oscillateurs.

2 Vérifier que la forme générale de la solution de l'équation du mouvement est

$$\Psi_n(t) = A_+ \cos(\omega t - nka + \phi_+) + A_- \cos(\omega t + nka + \phi_-), \tag{1}$$

soit

$$\Psi_n(t) = \underline{A_+} \exp i(\omega t - nka) + \underline{A_-} \exp i(\omega t + nka), \tag{2}$$

avec $\omega = 2\omega_0 \sin \phi/2$ et $k = \phi/a$. Quelle est la relation de dispersion entre ω et k ?

3 Donner la forme de l'équation du mouvement pour le premier mobile $n = 1$ et pour le dernier mobile $n = N$. Comment peut-on exprimer les conditions limites en faisant apparaître un mobile fictif 0 et un mobile fictif $N+1$?

4 Exprimer les conditions aux limites à partir de la solution de l'équation (avec sa forme complexe).

5 En déduire une conséquence sur les valeurs possibles de k (noter quelles sont quantifiées).

6 Donner l'expression du déplacement de la masse n. Représenter graphiquement les trois premiers modes propres pour une chaîne de 12 mobiles en prenant $\sin(\omega t + \phi)$=0. Placer ces trois modes sur le graphe de dispersion $\omega = f(k)$.